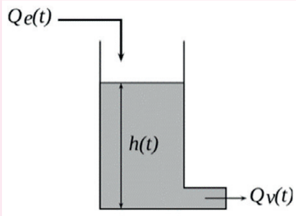
Sujet d'examen 2

Brevet de technicien supérieur • Groupement A
Métropole mai 2019 – Exercice 2, partie A

ÉNONCÉ



On considère le bac de stockage cylindrique représenté ci-contre.
À l'instant t, en secondes (s), on note $h(t)$ la hauteur d'eau, en mètres (m), dans le bac, $Q_e(t)$ le débit d'entrée, en m^3s^{-1}, et $Q_v(t)$ le débit de vidange, en m^3s^{-1}.
À l'instant $t = 0$, le bac est vide, donc $h(0) = 0$.
La conservation de la matière permet d'écrire, pour tout nombre $t \geqslant 0$: $Q_e(t) = S \times h'(t) + Q_v(t)$ où S est l'aire de la base du bac, exprimée en m^2, et h' la fonction dérivée de h. Dans cet exercice, on a $S = 8\ m^2$. De plus, on suppose, en faisant une approximation, que $Q_v(t) = 2 \times h(t)$.
On a donc $Q_e(t) = 8 \times h'(t) + 2 \times h(t)$.
On agit sur le débit d'entrée $Q_e(t)$ afin que la hauteur $h(t)$ atteigne 10 cm (soit 0,1 m).

1 Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé, l'évolution de Q_e pour tout nombre réel $t \geqslant 0$. On choisit 10 cm comme unité graphique. On prend, pour tout nombre réel $t \geqslant 0$:

(E) $Q_e(t) = U(t) - 0{,}8U(t - 0{,}9)$ où U désigne la fonction échelon unité : $\begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

h vérifie donc, pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $8 \times h'(t) + 2 \times h(t) = U(t) - 0{,}8U(t - 0{,}9)$.

2 On appelle $p \rightarrow H(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $t \rightarrow h(t)$. On rappelle les résultats suivants où g est une fonction ayant une transformée de Laplace G.

Fonction	Transformée de Laplace
$t \rightarrow U(t)$	$p \rightarrow \dfrac{1}{p}$
$t \rightarrow e^{-at}U(t) \quad a \in \mathbb{R}$	$p \rightarrow \dfrac{1}{p+a}$
$t \rightarrow U(t-a) \quad a \in \mathbb{R}$	$p \rightarrow \dfrac{1}{p}e^{-ap}$
$t \rightarrow g(t-a)U(t-a) \quad a \in \mathbb{R}$	$p \rightarrow G(p)e^{-ap}$
$t \rightarrow g'(t)U(t)$	$p \rightarrow pG(p) - g(0^+)$

a. Écrire l'égalité obtenue en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (E).
b. Montrer que $H(p) = \dfrac{1 - 0{,}8e^{-0{,}9p}}{(2 + 8p)p}$.

3 On note $A(p) = \dfrac{1}{(2 + 8p)p}$.

a. Vérifier que $A(p) = \dfrac{0{,}5}{p} - \dfrac{4}{2 + 8p}$. **b.** Comme $\dfrac{4}{2 + 8p} = \dfrac{0{,}5}{p + 0{,}25}$, on a aussi $A(p) = \dfrac{0{,}5}{p} - \dfrac{0{,}5}{p + 0{,}25}$.
En déduire l'originale $a(t)$ de $A(p)$.

c. On remarque que $H(p) = A(p) \times (1 - 0{,}8e^{-0{,}9p}) = A(p) - 0{,}8A(p)e^{-0{,}9p}$. Déterminer une expression de $h(t)$ pour tout nombre réel $t \geqslant 0$.

Sujet d'examen 3

Brevet de technicien supérieur • Groupement A
Métropole 2012 – Exercice 1, partie A

ÉNONCÉ

On s'intéresse maintenant à un système d'entrée-sortie numérique destiné à approcher un système analogique étudié donné. Une discrétisation de l'équation différentielle (E) avec un pas de discrétisation $T_e = 0{,}1$ s permet d'obtenir, pour tout entier naturel n, la relation (E′) suivante :

$$(E') : 2\frac{x(n+1)-x(n)}{T_e} + x(n+1) = 3.$$

Pour tout entier naturel n, le nombre $x(n)$ fournit une approximation de $x(nT_e)$. En particulier, on a $x(0) = 0$.

1 Montrer que la relation (E′) peut s'écrire, pour tout nombre entier positif ou nul,

sous la forme : $x(n+1) = \frac{20}{21}x(n) + \frac{1}{7}$.

2 On a rempli le tableau de valeurs ci-dessous :

n	0	1	2	3
$x(n)$	0	0,143	0,279	0,408

Calculer les valeurs approchées à 10^{-3} près des nombres réels $x(4)$ et $x(5)$.

3 On note $X(z)$ la transformée en Z de la suite $x(n)$. Déduire de la consigne 1 que $\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{7(z-1)\left(z-\frac{20}{21}\right)}$.

4 Déterminer les nombres A et B tels que $\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-1} - \frac{B}{\left(z-\frac{20}{21}\right)}$.

5 En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $x(n) = 3\left(1-\left(\frac{20}{21}\right)^n\right)$.

6 Le temps de réponse de ce système est la valeur du nombre réel t à partir de laquelle $s(t)$ atteint 95 % de la valeur 3.

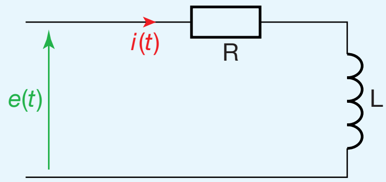
a. Préciser la limite de $x(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer le plus entier naturel n tel que $1-\left(\frac{20}{21}\right)^n \geqslant 0{,}95$.

c. En déduire, à 10^{-1} près, le temps de réponse en secondes de ce système numérique.

S'entraîner pour le CCF 2

On considère un circuit composé d'un résistor de résistance R = 1 Ω et d'une bobine d'inductance L = 1 H montés en série.



On applique en entrée une tension notée e, exprimée en volts (V), à l'instant t en secondes (s) par $e(t) = 20\mathrm{U}(t) - 20\mathrm{U}(t - 10)$ où U représente la fonction échelon unité.

1. Rappeler l'expression temporelle de la fonction U en fonction de t.

2. Déterminer l'expression de la transformée de Laplace du signal e.

On appelle $s(t)$ l'expression de la tension (exprimée en volts) aux bornes du résistor en fonction du temps, et S sa transformée de Laplace.

On admet ici que $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}s'(t) + s(t) = e(t)$ avec $s(0) = 0$.

3. Montrer que $\mathrm{S}(p) = \frac{20}{p(p+1)}(1 - e^{-10p})$.

4. Décomposer $\frac{20}{p(p+1)}$ en éléments simples.

5. En déduire l'expression du signal s en fonction du temps.

La bobine emmagasine de l'énergie, ce qui entraîne un certain retard de la réponse par rapport au signal d'entrée.

6. En négligeant ce retard, vérifier que pour tout nombre $t \in \mathbb{R}^+$, $s(t) = 20(e^{10} - 1)e^{-t}$.

S'entraîner pour le CCF 3

On considère un circuit composé d'un résistor de résistance R = 1 Ω et d'un condensateur de capacité C = 1 F montés en série.
On applique en entrée une tension notée e, exprimée en volts (V), à l'instant t en secondes (s) par $e(t) = 4t\,e^{-2t}\,\mathrm{U}(t)$ où U représente la fonction échelon unité.
On appelle $s(t)$ l'expression de la tension (exprimée en volts) aux bornes du condensateur en fonction du temps, et S sa transformée de Laplace.
On admet ici que :

$$(*)\ s'(t) + s(t) = e(t) \text{ avec } s(0) = 0.$$

1. Calculer l'expression de la dérivée e' de la fonction e sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. En déduire le sens de variation de e sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Déterminer la transformée de Laplace E du signal e.

4. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (*), montrer que
$\mathrm{S}(p) = \dfrac{4}{(p+2)^2(p+1)}$.
Un logiciel de calcul formel permet d'écrire :
$\mathrm{S}(p) = \dfrac{4}{(p+1)} - \dfrac{4}{(p+2)^2} - \dfrac{4}{(p+2)}$.

5. En déduire l'expression du signal s en fonction de t.

6. On représente graphiquement le signal de sortie s en fonction du temps (exprimé en secondes).

Estimer la durée au cours de laquelle la tension de sortie est supérieure ou égaler à 0,25 V.