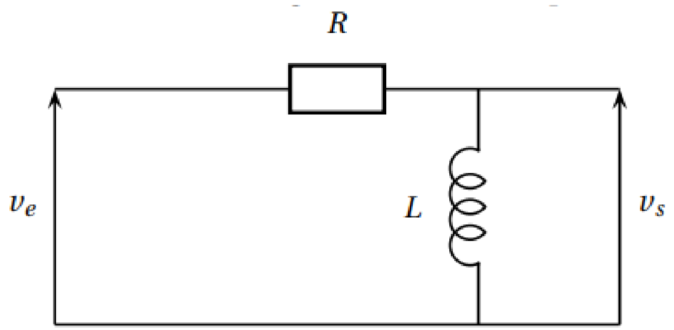
Sujet d'examen 5
ÉNONCÉ

Brevet de technicien supérieur - Groupement A
Métropole / Antilles / Polynésie mai 2021 - Exercice 2, partie A

Le montage suivant est composé d'une bobine d'inductance $L = 0{,}001$ henry et d'une résistance R (en ohm), assemblées en série. Ce montage est utilisé pour l'extraction d'un signal CPL haute fréquence du réseau.



Dans cette partie, la valeur de R est un paramètre strictement positif fixé. Pour tester ce montage on le soumet à une tension d'entrée constante $v_e = 12$ volts. On s'intéresse à la tension de sortie $v_s(t)$, exprimée en volt, en fonction du temps t (en seconde), aux bornes de la bobine L.

À $t = 0$, on admet que la tension aux bornes de la bobine est égale à 12 volts. La tension v_s vérifie, pour tout $t > 0$: $v_s'(t) + \frac{R}{L} v_s(t) = 0$.

1. On rappelle que l'équation différentielle $ay' + by = 0$ (avec a et b réels et $a \neq 0$) admet pour solutions les fonctions définies, pour tout réel t, par :

$$y(t) = Ke^{-\frac{b}{a}t} \text{ , avec } K \text{ constante réelle.}$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) : \ y'(t) + \frac{R}{L} y(t) = 0$$

2. En déduire que pour tout $t > 0$: $v_s(t) = 12e^{-1000Rt}$.

Pour se préparer à L'EXAMEN

Sujet d'examen 6
ÉNONCÉ

Brevet de technicien supérieur - Groupement A
Métropole / Antilles / Polynésie mai 2021 - Exercice 1, partie A

Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde.

On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$.
Une étude mécanique montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): y'' + 3y' + 2y = 4$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$,
y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 3r + 2 = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'' + 3y' + 2y = 0$.

On fournit les formules suivantes :

Équations	Solution sur un intervalle I
Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $y(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

2. Soit k un nombre réel. On définit la fonction constante g sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = k$.
Déterminer k pour que la fonction g soit solition de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Sujet d'examen 7
ÉNONCÉ

Brevet de technicien supérieur - Groupement B
Métropole septembre 2020 - Exercice 1, partie A

Un jouet pour enfant prévu pour être utilisé en extérieur, est un bonhomme de neige monté sur un ressort. Le principe de fonctionnement est le suivant : on comprime le jouet au sol et une fois relâché, celui-ci est propulsé dans les airs à une certaine hauteur et retombe ensuite au sol. On suppose que le mouvement du jouet est vertical.

On souhaite étudier la hauteur atteinte par le jouet en fonction du nombre d'années d'utilisation.
On modélise la hauteur que peut atteindre le jouet par une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 3$$

y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$; x représente la durée d'utilisation, exprimée en années; y' désigne la fonction dérivée de y et y'' désigne la fonction dérivée seconde de y.
On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique. Si Δ=0, $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où r est la solution double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $f(x) = [\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.

2. Soit un nombre réel k, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction constante g telle que $g(x) = k$.
Déterminer la valeur de k pour que la fonction g soit une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions suivantes : $f(0) = 4$ et $f(2) = 5e^{-2} + 3$.

Pour se préparer à l'EXAMEN

S'entraîner pour le CCF 3

Afin d'améliorer le déploiement d'une nacelle de pompier, on étudie en fonction du temps t (exprimé en secondes) la hauteur (exprimé en mètres) qu'elle atteint (jusqu'à son déploiement total). Cette fonction sera notée h et on supposera qu'elle est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
On admet que h vérifie l'équation différentielle

$$(E): 20y' + y = 36$$

où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
On sait de plus qu'à l'instant $t = 0$ la hauteur de la nacelle est de 3 mètres.

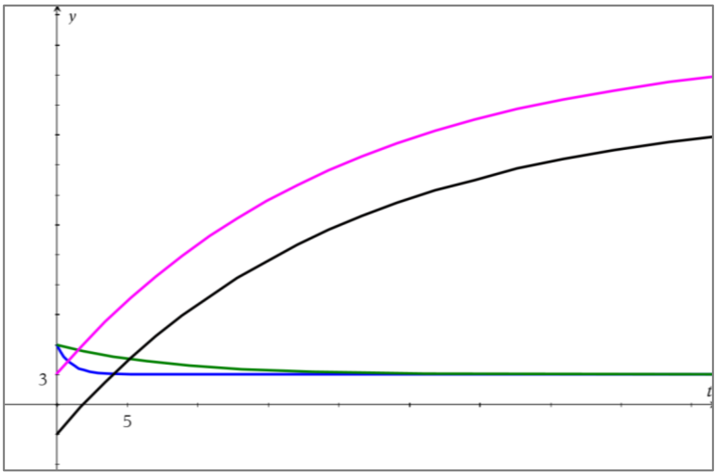
1. Comment se nomme l'équation différentielle $(H): 20y' + y = 0$?

2. Résoudre l'équation différentielle (H).

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	**Solution sur un intervalle I**
$ay' + by = 0$	$y(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$

3. Parmi les représentations graphiques suivantes, déterminer (en justifiant) celle de h.



4. Montrer que la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 36$ est une solution particulière de (E).

5. A l'aide de GeoGebra, déterminer l'expression de h.

6. On considère que la nacelle est complètement déployée lorsque la hauteur dépasse 35,99 mètres.

On dispose des fonctions Python suivantes :

Quelle commande faut-il écrire en console pour déterminer la valeur de t à partir de laquelle la nacelle est complètement déployée ?

```
from math import *

def h(t) :
   return 36-33*exp(-0.05*t)

def hauteur() :
   t=0
   while h(t)<35.99 :
      t=t+1
   return t
```