

Chapitre 15. Nombres complexes

Corrigés des exercices À vous de jouer

Exercice d'application 1 page 302

Solution

$$\bullet z_3 = i(-3 + 5i) = -3i + 5i^2 = -5 - 3i$$

Ainsi $Re(z_3) = -5$ et $Im(z_3) = -3$

$$\bullet z_4 = (5 - 4i)(1 + 2i) = 5 \times 1 + 5 \times 2i - 4i \times 1 - 4i \times 2i$$

$$z_4 = 5 + 10i - 4i - 8i^2 = 5 + 10i - 4i + 8$$

Donc $z_4 = 13 + 4i$. Ainsi $Re(z_4) = 13$ et $Im(z_4) = 4$

Exercice d'application 2 page 303

Solution

$$\text{On a } z_3 = \frac{2(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+4i}{3^2+2^2} = \frac{6+4i}{13}$$

$$\text{On trouve ainsi } z_3 = \frac{6}{13} + \frac{4}{13}i$$

$$z_4 = \frac{(2+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{8-2 \times 3i + 4i - 3i^2}{4^2+3^2} = \frac{8-6i+4i+3}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$$

On peut utiliser la calculatrice pour vérifier le calcul :

Texas Instruments	Casio	Numworks
<p>L'imaginaire pur i est</p> <p>obtenu par 2nde .</p> <p>NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP</p> $\frac{2}{3-2i}$ $\frac{2+i}{4+3i}$ $\frac{6}{13} + \frac{4}{13}i$ $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$	<p>L'imaginaire pur i est</p> <p>obtenu par SHIFT 0</p> <p>Math (Rad) Norm1 (d/c) Real</p> $\frac{2}{3-2i}$ $\frac{2+i}{4+3i}$ $\frac{6}{13} + \frac{4}{13}i$ $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$ <p>JUMP DELET MATH MATH</p>	<p>Dans Calculs on trouve :</p> <p>rad CALCULS</p> $\frac{2}{3-2i}$ $\frac{6}{13} + \frac{4}{13}i \approx 0.4615384615+0.3076i$ $\frac{2+i}{4+3i}$ $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i = 0.44-0.08i$

Exercice d'application 3 page 305

Solution

On a $a = 1$, $b = 2$ et $c = 17$.

$$\text{Le discriminant } \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 17 = 4 - 68 = -64.$$

$\Delta < 0$, l'équation (E) admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{-2-i\sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-2-8i}{2} = -1 - 4i$$

On a $z_2 = \bar{z}_1 = -1 - 4i = -1 + 4i$.

Les solutions de l'équation (E) sont $-1 - 4i$ et $-1 + 4i$.

On peut vérifier nos solutions à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

XCAS	GeoGebra
$\text{csolve}(z^2+2z+17=0,z)$ $\text{list}[-1+4i, -1-4i]$	CRésoudre($z^2 + 2z + 17 = 0, z$) $\rightarrow \{z = -1 + 4i, z = -1 - 4i\}$

Texas Instruments	Numworks
<p>Dans résol sélectionner Racines d'un polynôme, il faut bien sélectionner degré 2 et a+bi.</p> <p>NORMAL FLOTT AUTO a+bi DEGRÉ MP PLYSMLT2 APP</p> <p>MODE RACINES D'UN POLYNÔME</p> <p>DEGRÉ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 RÉEL a+bi re^(θi) AUTO DÉC</p> <p>NORMAL SCI ING FLOTT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 RADIAN DEGRÉ</p> <p>MENU AIDE SUIV.</p> <p>NORMAL FLOTT AUTO a+bi DEGRÉ MP PLYSMLT2 APP</p> <p>1x²+ 2x+ 17=0</p> <p>x1 = -1+4i x2 = -1-4i</p>	<p>rad SOLVEUR Equations</p> <p>$z^2+2z+17=0$</p> <p>Ajouter une équation</p> <p>Résoudre l'équation</p> <p>rad SOLVEUR Equations Solution</p> <p>z1 -1-4i z2 -1+4i Δ=b²-4ac -64</p> <p>Ne pas oublier d'activer les nombres complexes. Pour cela aller dans Paramètres, Forme complexe et sélectionner algébrique.</p>

Exercice d'application 4 page 305

Solution

a. Le point A a pour abscisse 5 et pour ordonnée -2 , de même le point B a pour abscisse -2 et pour ordonnée 2. Enfin le point C a pour abscisse 3 et pour ordonnée 4.

b. $\overrightarrow{BC}(z_C - z_B)$ ainsi $z_C - z_B = 3 + 4i - (-2 + 2i)$
 $= 3 + 4i + 2 - 2i$
 $= 5 + 2i$

Donc $\overrightarrow{BC}(5 + 2i)$.

$I\left(\frac{z_A+z_C}{2}\right)$ ainsi $\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{5-2i+3+4i}{2} = \frac{8+2i}{2} = 4 + i$
 Donc $I(4 + i)$.

Exercice d'application 5 page 306

Solution

a. On a $|z_D| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$|z_D|$ correspond à la longueur du segment OD.

car $OD = |z_D - z_O| = |z_D - 0| = |z_D|$

b. $CD = |z_D - z_C| = |-5 + 3i - (2 + i)| = |-5 + 3i - 2 - i| = |-7 + 2i|$
 $= \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

Exercice d'application 6 page 307

Solution

a. $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $|z| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

Ainsi $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice d'application 7 page 308

Solution

Soit $B(-2 + i)$, soit $z \neq -2 + i$ alors $\arg(z + 2 - i) = (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) (2\pi)$.

Ainsi $(\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$, donc M appartient à la demi-droite]BC) avec $B(-2 + i)$.