Chapitre 11. Statistique inférentielle

Corrigés des exercices À vous de jouer

Exercice d'application 1 page 215

Solution

Le poids moyen est $m_e = \frac{247\times2+248\times5+\cdots+253\times3}{100} = 250{,}04$

1. On peut donc estimer que ponctuellement la moyenne sur 1000 baguettes est $\hat{m} = 250{,}04$

2. De même on trouve $\sigma_e = 1{,}47$ à 10^{-2} près donc on estime $\hat{\sigma} = 1{,}47\sqrt{\frac{50}{49}} = 1{,}48$ 10^{-2} près.

Exercice d'application 2 page 217

Solution

1. On calcule la moyenne m_e sur l'échantillon en prenant le centre de chaque classe :

$$m_e = \frac{15\times21+45\times24+75\times28+105\times24+135\times15+225\times8}{120} = 82$$

On calcule l'écart type σ_e sur l'échantillon : $\sigma_e = 53{,}77$ à 10^{-2} près.

On peut donc estimer $\hat{\sigma} = \sigma_e\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 53{,}77\sqrt{\frac{120}{119}} = 53{,}99$ à 10^{-2} près.

On utilise ensuite $\hat{\sigma}$ pour estimer σ.

On a $I_{0,05} = [m_e - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ m_e + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = [82 - 1{,}96\frac{53{,}99}{\sqrt{120}}\ ;\ 82 + 1{,}96\frac{53{,}99}{\sqrt{120}}] = [72\ ;\ 92]$ arrondis à l'unité.

Le directeur peut donc estimer avec une probabilité supérieure ou égale à 95 % que le temps moyen consacré par ses employés à des tâches professionnelles le weekend est compris entre 72 h et 92 h.

2. On cherche n tel que $2C_{0,05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 10$ donc $n \geqslant 448$. Il faut interroger au minimum 448 personnes.

Exercice d'application 3 page 217

Solution

On détermine l'intervalle de confiance au seuil de 99 % de la fréquence de pannes.

La fréquence de pannes sur l'échantillon est $f_e = \frac{2}{80} = 0{,}025$

On a $I_{0,01} = \left[fe - 2{,}58\sqrt{\frac{fe(1-fe)}{n}}\ ;\ fe + 2{,}58\sqrt{\frac{fe(1-fe)}{n}}\right]$

$= \left[0{,}025 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}025\times0{,}975}{80}}\ ;\ 0{,}025 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}025\times0{,}975}{80}}\right]$

$= [0\ ;\ 0{,}07]$ à 10^{-3}.

L'entreprise peut donc prévoir, avec une probabilité d'au moins 99 %, au maximum 0,07 × 5 000 = 350 retours en SAV la première année.

Exercice d'application 4 page 219

Solution

Étape 1 : choix de l'affirmation à tester, la moyenne m des ventes est 287,2 €.
L'hypothèse nulle est H_0 : « m = 287,2€ ». L'hypothèse alternative H_1 : « $m \neq 287{,}2$ ».

Étape 2 : Détermination de la distribution du test
On utilisera ici une loi normale de moyenne $m = 287{,}2$ et d'écart type $\sigma = 78{,}3$ mg.

Étape 3 : Choix α du seuil de signification. On choisit $\alpha = 0{,}01 = 1$ %.

Étape 4 : Détermination de la région critique
On cherche l'intervalle $I_{0,01} = [a\,;\,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) = 0{,}99$ où X est une variable aléatoire donnant le prix moyen d'une vente sur les 80 tickets sélectionnés.
X suit donc une loi normale $\mathcal{N}(287{,}2\,;\,\frac{78{,}3}{\sqrt{80}})$.
À la calculatrice $I_{0,01} = [264{,}6\,;\,309{,}8]$ à 10^{-1}.

Étape 5 : Énoncé et application de la règle de décision
La mesure sur l'échantillon a donné $m_e = 310{,}1$ qui n'appartient à $I_{0,01}$ on rejette donc H_0 et on accepte H_1 au risque de 1 % . On peut donc affirmer que la moyenne des ventes n'est pas de 287,2 €, au risque de 1 % de se tromper, donc que la publicité a très probablement modifié cette moyenne.

Exercice d'application 5 page 220

Solution

On cherche à valider si la durée de vie moyenne est de 5000 h, une durée de vie supérieure ne poserait pas de problème pour le fabricant, la zone critique correspondra aux valeurs inférieures à la moyenne.

Étape 1 : choix de l'affirmation à tester
On pose comme hypothèse nulle H_0 : « $m = 5000$ ». L'hypothèse alternative sera H_1 : « $m < 5000$ ».

Étape 2 : Détermination de la distribution du test
On utilisera ici une loi normale de moyenne $m = 5000$ et d'écart type $\sigma = 92$.

Étape 3 : Choix α du seuil de signification. On choisit $\alpha = 0{,}01 = 1$ %.

Étape 4 : Détermination de la région critique
On cherche l'intervalle $I_{0,01} = [a\,;\,+\infty[$ tel que $P(a \leq X) = 0{,}99$ où X est une variable aléatoire donnant la durée de vie moyenne d'une batterie sur l'échantillon de 50 batteries.
X suit donc une loi normale $\mathcal{N}(5000\,;\,\frac{92}{\sqrt{60}})$.
À la calculatrice $I_{0,01} = [4969{,}7\,;\,+\infty[$ à 10^{-1}.

Étape 5 : Énoncé et application de la règle de décision
La mesure sur l'échantillon a donné $m_e = 4972$ qui appartient à $I_{0,01}$ on accepte donc H_0 au seuil de 99 %, le fabriquant ne peut pas rejeter l'affirmation du producteur, il accepte donc l'affirmation que la durée de vie moyenne des batteries est de 5000h au seuil de 99%.

Exercice d'application 6 page 222

Solution

Étape 1 : choix de l'affirmation à tester, la fréquence des électeurs favorables au candidat A est 0,52. On pose donc comme hypothèse nulle H_0 : « $f = 0,52$ ». L'hypothèse alternative H_1 : « $f \neq 0,52$ ».

Étape 2 : Détermination de la distribution du test

On utilise une loi binomiale B(700 ; 0,52)

Étape 3 : Choix α du seuil de signification. On choisit $\alpha = 0,01 = 1$ %.

Étape 4 : Détermination de la région critique

On cherche l'intervalle $I_{0,01} = [\frac{a}{700} ; \frac{b}{700}]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0,99$ où X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(700 ; 0,52).

À la calculatrice on trouve $a = 330$ et $b = 398$ donc $I_{0,01} = [\frac{330}{700} ; \frac{398}{700}] = [0,47; 0,57]$ à 10^{-1}.

Étape 5 : Énoncé et application de la règle de décision

La mesure sur l'échantillon a donné $f_e = 0,48$ qui appartient à $I_{0,01}$ on accepte donc H_0 au seuil de 99 %, l'adversaire ne peut donc pas remettre en cause l'affirmation du candidat A au seuil de 99 %.