Chapitre 06. Séries numériques et transformée de Fourier

Corrigés des exercices À vous de jouer

Exercice d'application 1 page 109

Solution

a. $v_0 = \frac{(-3)^0}{7^{0+1}} = \frac{1}{5}$.

b. Le terme général de cette série est $v_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{7}\right)^n$.

La suite $(\boldsymbol{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\boldsymbol{v_0} \times \boldsymbol{q^n}$ avec $\boldsymbol{q} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$. $(\boldsymbol{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique. On en déduit que :

$$\sum \boldsymbol{v_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{7}\right)^k = \frac{1}{5} \times \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k \quad \text{(par linéarité de la somme)}$$

c. $|q| < 1$, la série $\sum v_n$ converge donc vers la somme $\mathrm{S} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1-q} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{7}{20}$.

Exercice d'application 2 page 110

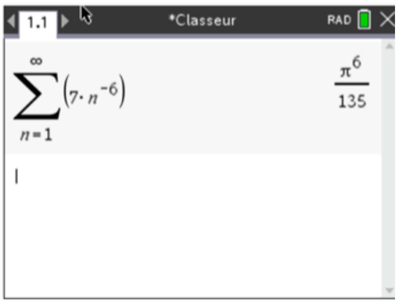
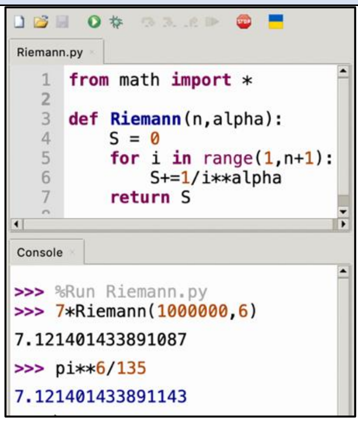
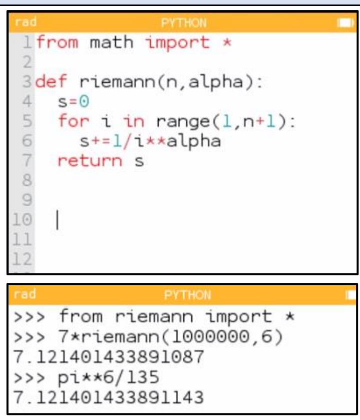
Solution

a. On considère la série S_n de terme général u_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{k^6} = 7 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^6} = 7 \times \sum_{k=1}^{n} v_k \quad \text{(par linéarité de la somme)}$$

$\sum v_n$ est une série de Riemann de terme général $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha = 6$, la série $\sum v_n$ est donc convergente car $\alpha > 1$ ce qui implique que $\sum u_n$ l'est également.

b. La somme de la série $\sum u_n$ peut être déterminée à l'aide de plusieurs outils numériques :

<table>
<tr><th>TI-nspire</th><th>Script Python</th><th>Numworks</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Exercice d'application 3 page 113

Solution

La fonction f associée au signal est une fonction π −périodique définie par :

$$\begin{cases} f(t) = -3 \ \textit{pour tout nombre } 0 \leq t < \dfrac{\pi}{2} \\ f(t) = 0 \ \textit{pour tout nombre } \dfrac{\pi}{2} \leq t < \pi \end{cases}$$

Calcul de a_0 :

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\,dt\right]$ d'après la relation de Chasles

Donc $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3)\,dt + 0\right] = \frac{1}{\pi} \times [-3t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \times \frac{-3\pi}{2} = -\frac{3}{2}$

Calcul de a_n :

La pulsation du signal est $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

En utilisant la même méthode que pour le calcul du coefficient a_0 on obtient :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \times \cos(2nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -3 \times \cos(2nt)\,dt$$

$\Leftrightarrow a_n = -\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt)\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$$\Leftrightarrow a_n = -\frac{6}{\pi} \times \left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{6}{\pi} \times \frac{\sin(n\times\pi)}{2n} = \frac{-3\times\sin(n\times\pi)}{n\pi}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 0$$

Calcul de b_n :

En utilisant la même méthode que précédemment il vient :

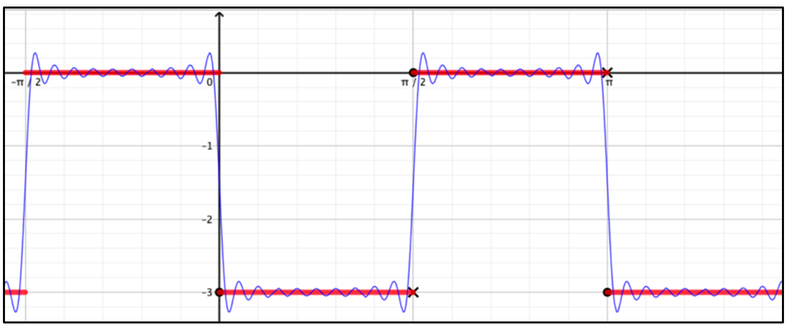
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \times \sin(2nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -3 \times \sin(2nt)\,dt$$

$\Leftrightarrow b_n = -\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$$\Leftrightarrow b_n = -\frac{6}{\pi} \times \left[\frac{-\cos(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{\pi} \times \left(\frac{-\cos(n\times\pi)}{n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{3(\cos(n\times\pi) - 1)}{n\pi}$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{3((-1)^n - 1)}{n\pi}$$

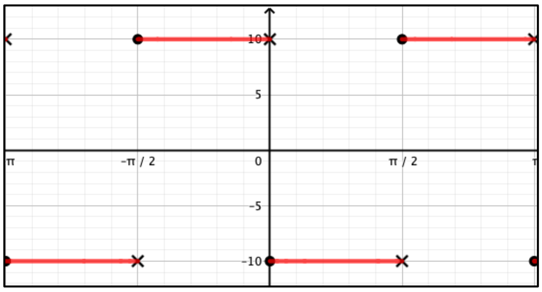
Représentation de la somme partielle de la série de Fourier étudiée (pour 30 harmoniques) :



Exercice d'application 4 page 115

Solution

a. Le signal représenté ci-dessous est associé à la fonction f.



b. La représentation graphique de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine du repère, ce qui permet d'affirmer que la fonction f est impaire.
c. La fonction f étant impaire, on en déduit que les coefficients de la série de Fourier relative à la fonction f sont alors définis pour tout nombre $n \in \mathbb{N}^*$ par :

- $a_0 = a_n = 0$
- $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \times \sin\left(n \times \frac{2\pi}{\pi} \times t\right)\, dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -10 \times \sin(2nt)\, dt$

Donc $b_n = -\frac{40}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)\, dt$ par linéarité de l'intégrale et il vient :

$$b_n = -\frac{40}{\pi}\left[-\frac{\cos(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{20}{n\pi} \times (\cos(n\pi) - 1)$$

On en déduit que $b_n = \frac{20}{n\pi} \times ((-1)^n - 1)$

Exercice d'application 5 page 117

Solution

f est une fonction périodique et continue par morceaux. L'égalité de Parseval nous permet alors de noter :

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right) = a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |4t^2|^2 dt = \left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{16 \times (-1)^n}{n^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |4t^2|^2 dt = \left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{256}{n^4}$$

$\Leftrightarrow \frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + 128\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ par linéarité de l'intégrale et de la somme

$\Leftrightarrow \frac{16}{\pi}\int_0^{\pi} t^4 dt = \left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + 128\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ car la fonction $t \longmapsto t^4$ est paire

$$\Leftrightarrow \frac{16}{\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} = \left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + 128\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \Leftrightarrow \frac{16}{\pi} \times \frac{\pi^5}{5} = \left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + 128\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16\pi^4}{5} - \frac{16\pi^4}{9} = 128\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \Leftrightarrow \frac{64\pi^4}{45} = 128\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \Leftrightarrow \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 4$. La valeur de α est supérieure à 1, cette série est donc convergente et sa somme vaut $\frac{\pi^4}{90}$ d'après l'étude précédente.