Chapitre 03. Calcul intégral

Corrigés des exercices À vous de jouer

Exercice d'application 1 page 48

Solution

a. $G'(x) = 3 \times 2 \times (2x+1)^2 = 6(2x+1)^2 = f(x)$: G est bien une primitive de f.
b. Les primitives de f sont donc de la forme : $x \mapsto (2x+1)^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$.
c. Soit $F(x) = (2x+1)^3 + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
$F(1) = 28 \Leftrightarrow (2 \times 1 + 1)^3 + k = 28 \Leftrightarrow 3^3 + k = 28 \Leftrightarrow k = 28 - 27 = 1$
Finalement, la primitive F de f telle $F(1) = 28$ est $F(x) = (2x+1)^3 + 1$.

Exercice d'application 2 page 50

Solution

a. Une primitive de f : $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{3} - 2x$
Une primitive de g : $x \mapsto 7\mathrm{e}^x - x^2$
Une primitive de h : $x \mapsto 2\mathrm{e}^{-x}$
b. Une primitive de k : $x \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+5}$

Exercice d'application 3 page 51

Solution

$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

Exercice d'application 4 page 52

Solution

a. $-2 + \frac{1}{x-1} = \frac{-2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{-2x+2+1}{x-1} = \frac{-2x+3}{x-1} = f(x)$
b. $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 \left(-2 + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = [-2x + \ln(x-1)]_2^5$
$= (-10 + \ln(4)) - (-4 + \ln(1))$
$= -6 + 2\ln(2)$

Exercice d'application 5 page 53

Solution

On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$; on a donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$.

$I = \int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - [x]_1^2 = 2\ln(2) - (2-1) = 2\ln(2) - 1$

Exercice d'application 6 page 54

Solution

En traçant les deux représentations graphiques des fonctions f_1 et f_2, on voit que sur $[0\,;3]$, on a $0{,}5x^2 \leq 2x$.

$$A = \int_0^3 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^3 = 3^2 - \frac{3^3}{6} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

L'aire recherchée est donc égale à $\frac{9}{2}$ U.A.